Dario Bednarski

Mathe für Antimathematiker

Analysis

Bednarski, Dario: Mathe für Antimathematiker
Sersheim, September 2014

Dario Bednarski
Kopernikusstraße 4
74343 Sachsenheim

Ein Titeldatensatz für diese Publikation ist bei der Deutschen Nationalbibliothek erhältlich.

2. Auflage

ISBN 978-3-00-047263-3

Druckerei
Druckerei WIRmachenDRUCK GmbH
Mühlbachstraße 7
71522 Backnang
Deutschland

Visuelle Darstellungen (Cover)
©iStock.com/Gile68
©bigstockphoto.com/Ivelin Radkov

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort

...blabla..............................bla.........bla.......................bla................bla........

..bla............bla.............blabla...........................blablablabla..........blabla..

.....bla..........[diesen].............blabla...........bla...........blabla....blabla..........

……......blabla.........................bla..bla....................bla...bla.........................

….[Scheiß].................bla.........blabla.......bla...........blabla...................bla..

bla.....bla........blablablabla..................................blabla...............................

......bla......blabla.......bla..............blablabla....................blabla...bla............

...blabla......blabla..............................[liest].............blabla......bla......blabla.

...........blabla....................................blabla..............blablabla......................

..blabla.........blablabla..[sich].......blabla.........blabla...............bla.........bla.

...........bla....................................blablabla.......bla.........blablablabla..........

..blabla...................[eh]blablablabla.........bla.....................blabla...bla.......

..............blabla....................................blablabl.[keiner]blabla.......bla.........

................bla..........blabla.............blablabla...........bla

.................blablabla...[durch]blablabla...........bla........

blablablabla......blablabla.............bla..............bla.........

Zwei wichtige Anmerkungen

So ist das Buch aufgebaut:

Dieses Buch habe ich in drei große Kapitel aufgeteilt:

1. Rechnen,
2. Visuelles vorstellen,
3. Mathe.

Zuerst werde ich dir beibringen, Gleichungen jeder Art lösen zu können. Das ist absolute Grundlage für Mathe. Dann werde ich dir erklären, wie man sich Funktionen anhand ihres Funktionsterms auf den ersten Blick optisch grob vorstellen kann und dann kommen wir zum Eigentlichen – Mathe.

Fang gar nicht erst an die ersten beiden Kapitel zu überspringen, weil du meinst, dass du sie nicht bräuchtest und nur Mathe wichtig ist. Es ist als würdest du ein Haus ohne Fundament auf weichen Boden bauen wollen – es wird immer wieder einstürzen und nie fertig gebaut werden können. Ich kann dir nur empfehlen die ersten beiden Kapitel sorgfältig durchzulesen und immer wieder Aufgaben zum üben zu machen. Erst dann wirst du nämlich merken, dass Mathe plötzlich soo einfach ist und man tatsächlich nicht viel wissen muss!

Ganz wichtig!

Du musst dich entscheiden, dass du Mathematik verstehen willst. Wenn du das Buch ohne diese Entscheidung liest, dann wird es dir nicht viel bringen. Also, auch wenn es dir vielleicht schwer fällt das zu glauben, aber du willst jetzt Mathe verstehen! – krass, oder!? :)

Naja, genug gelabert, jetzt fangen wir mal an…

Rechnen

Rechnen mit „normalen“ Gleichungen

[...]

Linearen Gleichungen

[...]

Quadratischen Gleichungen

[...]

Mitternachtsformel (auch ABC – Formel genannt).

In manchen Schulen (wie auch in meiner), wird die **PQ-Formel** gelehrt. Die erkläre ich dann hinterher.

[...]

Zusammenfassung (Mitternachtsformel)

[...]

Die PQ – Formel

[...]

Zusammenfassung (PQ-Formel)

[...]

Tipps zum Lösen einer quadratischen Gleichung

[...]

Für die Lösung einer quadratischen Gleichung braucht man <u>nicht</u> immer eine Formel.

[...]

Zusammenfassung (lineare und quadratische Gleichungen)

Bis jetzt kannst du lineare und quadratische Gleichungen lösen. Bei den linearen müsste man einfach nur nach x auflösen, bei den quadratischen könnte es – je nach Zusammenstellung – mehrere Möglichkeiten geben. Zuerst sollte aber alles auf eine Seite geschmissen werden, sodass da $0=\ldots$ steht.

Hier eine Übersicht, wann du welchen Lösungsansatz verwenden kannst:

$0=ax^2+bx+c$	$0=ax^2+bx$	$0=ax^2+c$
Formel nutzen	Formel nutzen oder ausklammern	Formel nutzen oder Wurzel ziehen

Ansonsten musst du dir noch zwei Dinge unbedingt merken:

1. Wenn bei einem Produkt ein Faktor Null ist, dann ist das ganze Produkt Null.
2. Wenn man die Wurzel zieht, ergibt das immer zwei Ergebnisse, ein positives (zeigt der Taschenrechner an) und ein negatives (zeigt der Taschenrechner nicht an – muss man selbst dran denken).

[...]

Substitution

[...]

Zusammenfassung (Substitution)

1. [...]
2. [...]
3. [...]
4. [...]

[...]

Ausklammern.

[...]

Zusammenfassung (lösen von „normalen“ Gleichungen)

[…]

Rechnen, wenn das x im Nenner steht

[...]

Rechnen, wenn das x oben steht

[...]

Der natürliche Logarithmus ist nichts anderes als der Logarithmus zur Basis **e** :

$$\log_e = \ln$$

Zusammenfassung (x steht oben)

1. [...]
2. [...]
3. [...]

Rechnen mit Sinus/Kosinus/Tangens

Wie gerade schon erwähnt, nennt man so Gleichungen mit Sinus etc. dann **trigonometrisch**. Das kann man sich vielleicht an dem „Tri“ merken, was irgendetwas mit „drei“ zu tun hat. Es gibt eben Sinus, Kosinus und Tangens.

Naja, wie auch immer man das alles nennt und sich merkt – Hauptsache wir können damit irgendwie rechnen.

Beispiel: $\sin(x)=0{,}5$

Das Ziel ist ja immer nach x aufzulösen und dabei stellt sich hier eine ähnliche Frage wie bei den Exponentialgleichungen, bei denen wir uns gefragt haben, wie wir das x aus dem Exponenten bekommen könnten. So könnten wir uns hier fragen: Wie bekommen wir das x da aus diesem Sinus raus? Bei den Exponentialgleichungen haben wir dafür den Logarithmus angewendet. Wenn wir das x aus dem Sinus bekommen wollen, müssen wir den **Arcussinus** anwenden. Den Arcussinus findest du auf deinem Taschenrechner – da wird er so geschrieben: $\sin^{-1}$. Und analog dazu, also genauso wie wir das x aus dem Sinus raus holen, könnten wir es auch aus dem Kosinus mit $\cos^{-1}$ und Tangens mit $\tan^{-1}$ holen.

Dafür gibt es – wie bei den Exponentialgleichungen – **eine Voraussetzung**: Alles muss auf einer Seite stehen und Sinus bzw. Kosinus bzw. Tangens auf der anderen.

Trigonometrische Gleichungen rechnet man ähnlich wie Exponentialgleichungen. Man muss eine Voraussetzung erfüllen und dann das x mittels der Umkehrfunktion raus holen.

$\sin(x)=a \qquad | \sin^{-1}$

$x=\sin^{-1}(a)$

Dabei musst du beachten, dass $\sin^{-1}(a)$ in den Taschenrechner eingegeben werden kann und deswegen nichts anderes als eine Zahl ist. Genau so ist es ja auch mit $\log_a(b)$. Das kann man auch einfach ausrechnen…

Beachte: Je nachdem wie gut der Taschenrechner ist, kommt bei dem Ergebnis die Angabe im Bogenmaß <u>oder</u> in Grad raus. Das kann man bei manchen Taschenrechnern auch einstellen. Wenn also irgendetwas ganz komisches raus kommen sollte, dann einfach mal gucken, ob man das Ergebnis vielleicht einfach anders ausgeben lassen muss.
Okay, das war´s auch schon. Mehr musst du auch hier nicht wissen.

Zusammenfassung (Rechnen mit Sinus/Kosinus/Tangens)

1. Umformen, sodass $a=\sin(x)$
2. x mit der Umkehrfunktion $\sin^{-1}$ raus holen: $x=\sin^{-1}(a)$

Falls das Ergebnis merkwürdig erscheint, könnte es sein, dass man zwischen Grad und Bogenmaß im Taschenrechner umstellen muss.

Zusammenfassung (alles bis hierhin)

Lineare Gleichungen

[...]

Quadratische Gleichungen

[...]

Substitution

[...]

Ausklammern

[...]

x im Nenner (gebrochenrational)

[...]

x steht oben (Exponentialgleichungen)

[...]

Sinus/ Kosinus/ Tangens (trigonometrisch)

[…]

Als nächstes zeige ich dir, wie du dir anhand des Funktionsterms die Funktion optisch vorstellen kannst. Das ist bei sehr vielen Aufgaben sehr sehr hilfreich..

Visuelles vorstellen

Der Sinn dieses Kapitels

Zuerst will ich dir den Sinn dieses Kapitels erklären. Das ist ganz wichtig, damit deine Frage „Warum sollte ich das lesen?!“ beantwortet wird.

Das Kapitel dient grundsätzlich zum <u>einfacheren Lernen</u> und zum besseren Verständnis von Mathe. Begründet wird das ganze psychologisch:

1. Wenn ich dir etwas erzähle und du das, was ich dir erzähle, zum aller ersten Mal hörst, dann wirst du dir nur wenig davon behalten können.
2. Wenn du das, was ich dir erzähle, schon einmal gehört hast und somit gedanklich einordnen kannst, dann kannst du dir schon mal mehr davon behalten, als wenn du es zum ersten Mal gehört hättest.
3. Wenn du – als dritte und letzte Stufe – vorausahnen kannst, was ich dir erzähle, dann wirst du dir fast alles behalten können!

Genau so ist es auch beim Lernen von Mathe. Wenn du eine Aufgabe machst, die du noch nie vorher gemacht hast (und auch keine ähnliche Aufgabe), dann bist du danach nicht viel schlauer, weil du am Ende der Aufgabe kaum noch weißt, wie du überhaupt zum Ergebnis gekommen bist. Wenn du eine ähnliche oder sogar die gleiche Aufgabe schon einmal gemacht hast, dann wirst du dir beim Bearbeiten der

Aufgabe schon etwas mehr merken können, weil du es gedanklich einordnen kannst. Und auch hier wieder die letzte Stufe: Wenn du das Ergebnis der Aufgabe vorausahnen kannst, dann lernst du auch am meisten dabei.

Und genau dieses Vorausahnen können wir in Mathe beim Thema Analysis sehr gut durch das visuelle Vorstellen abdecken. Deswegen ist auch dieses Kapitel enorm wichtig, auch wenn du es in der Schule so noch nicht gehört hast.

> Je besser du dir Funktionen visuell vorstellen kannst, desto einfacher wird dir die Bearbeitung von Aufgaben fallen, weil du die Ergebnisse vorausahnen kannst.

Jetzt geht's los

Also, wir fangen mal gaaanz allgemein an: Es gibt hauptsächlich

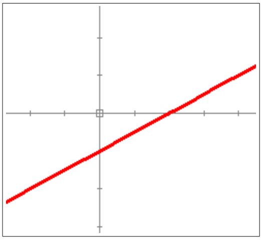
1. Ganzrationale Funktionen (Bsp.: $f(x)=x^3-2x^2+5$)
2. Gebrochenrationale Funktionen (Bsp.: $f(x)=x^{-1}+\frac{2}{x^3}$)
3. Exponentialfunktionen (Bsp.: $f(x)=e^x,\ g(x)=2^x$)
4. Trigonometrische Funktionen (Bsp.: $f(x)=\sin(x),\ g(x)=\cos(x)$)

die du unterscheiden können musst. Also genau die Funktionen, deren Gleichungen du schon beim Rechnen geübt hast. Jetzt wird es mehr darum gehen, wie die Funktionen aussehen und was sie für Eigenschaften haben.

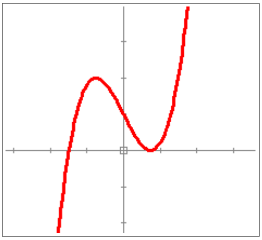
Ganzrationale Funktionen

[…]

Damit du mal ein paar Graphen von ganzrationalen Funktionen siehst, habe ich dir hier ein paar Beispiele gegeben. Der Grad der jeweiligen Funktion steht unter dem Bild. Schau dir diese 12 Graphen doch mal etwas genauer an und versuche Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu finden. Nimm dir dafür bitte 1-2 Minuten Zeit.



Grad 1



Grad 3

[...]

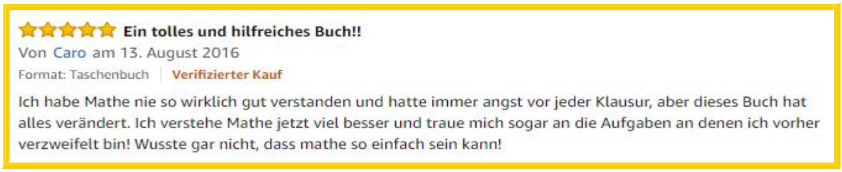
Und, was ist dir aufgefallen? Ist dir vielleicht aufgefallen, dass Funktionen mit geradem und ungeradem Grad getrennt sind? Oben sind sechs Graphen von Funktionen mit ungeradem Grad und unten sechs Graphen von Funktionen mit geradem Grad.

Wenn dir das aufgefallen ist, sind dir dann vielleicht auch
[...]

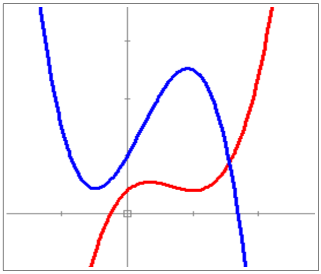
Als letztes Unterscheidungsmerkmal könnte dir noch aufgefallen sein,
[...]

Mit den eben beschriebenen Informationen schaust du dir die Graphen bitte jetzt noch einmal für 2 Minuten an und versuche dabei jedes Unterscheidungsmerkmal zu erkennen. Dafür liste ich dir die Unterscheidungsmerkmale hier übersichtlich auf:

1. [...]
2. *ungerader Grad:* [...]
   gerader Grad: [...]
3. [...]



Jetzt will ich noch kurz klären, was dafür ausschlaggebend ist, dass zum Beispiel eine Funktion mit ungeradem Grad von unten nach oben verläuft und nicht von oben nach unten. Was ist also am Funktionsterm der beiden Funktionsgraphen für dieses Verhalten verantwortlich?



[...]

y-Achsenabschnitt.

[...]

Zusammenfassung (Visuelles vorstellen – Ganzrationale Funktionen)

Man kann anhand des Funktionsterms zwei Dinge ablesen

1. [...]
2. [...]

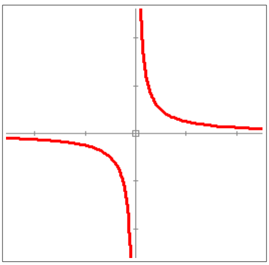
[...]
Die grobe Form einer ganzrationalen Funktion wird durch folgende drei Dinge beeinflusst:

1. [...]
2. [...]
3. [...]

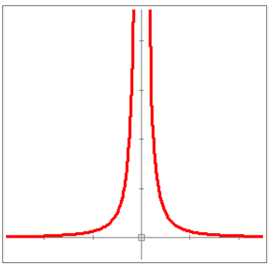
Und hier noch einmal alles übersichtlich in einer Tabelle und Schaubildern zusammengefasst:
[...]

Gebrochenrationale Funktionen

[...]
Aber schau dir erst mal die 9 Graphen von gebrochenrationalen Funktionen an. Das Vorzeichen und ob der Grad gerade oder ungerade ist, steht unter dem Bild.



\+ ungerade



\+ gerade

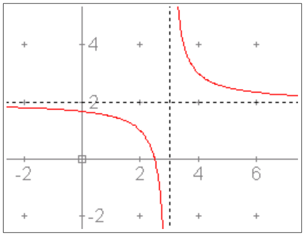
[...]

[...]

Letztlich bleiben beim visuellen Vorstellen der gebrochenrationalen Funktionen noch die **Asymptoten** anzusprechen. Was war denn das nochmal!? – Stimmt´s? ☺

Eine **Asymptote** ist eine Gerade (könnte auch eine Kurve sein, ist es aber meistens nicht), die vom Graphen der Funktion nie geschnitten wird. Somit stellt sie eine **Hilfslinie** zum Zeichnen der Funktion dar.

Ich kann dir nur empfehlen, wie im Beispiel hier rechts, die Asymptoten gestrichelt einzuzeichnen. Dadurch wird deine Zeichnung viel übersichtlicher und damit ist es auch einfacher den Graphen so einer gebrochenrationale Funktion zu zeichnen.



Um das alles zu üben, kannst du die Aufgaben im Aufgabenbuch auf Seite 16 machen.

Dieses Buch ersetzt den Nachhilfelehrer
Von T., Anke am 7. September 2017
Format: Taschenbuch | Verifizierter Kauf

Da mein 16-jähriger Sohn bereits zu Beginn der 11.Klasse in Mathe resignierte, vertraute ich auf die vielen positiven Rezensionen hier und bestellte dieses Buch. Als es ankam, dachten wir so: Hm, dieses kleine Heftel, ist das alles? (Verpackung nochmal umgedreht und geschüttelt).
Mein Sohn liest (!!!) seitdem darin, manchmal kichert er unkontrolliert dabei. Er nimmt es abends mit ins Bett und beim Gucken der Wahlkampfsendungen mit vor den Fernseher. Und es liegt griffbereit auf seinem Schreibtisch, diese Ehre widerfährt sonst nur seinem Gaming-Computer. Manchmal liest er mir eingerahmte Merksätze daraus vor und entrüstet sich darüber, dass die Lehrerin eigentlich nur diesen einen "Zaubersatz" hätte sagen müssen und es wären ihm viele Grübelstunden erspart geblieben. Kann nur sagen: Danke.

Zusammenfassung (Visuelles Vorstellen – Gebrochenrationale Funktionen)

1. [...]
    - [...]
    - [...]
    - [...]
2. [...]
3. […]

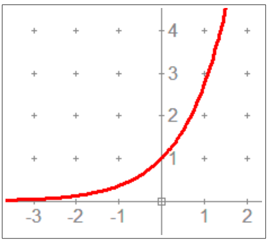
Und hier noch einmal alles übersichtlich in einer Tabelle und Schaubildern zusammengefasst:

[...]

Exponentialfunktionen

[…]

Sieh dir bitte erst mal die folgenden 9 Exponentialfunktionen und deren Funktionsgleichungen genau an. Versuche dabei anhand der oben genannten Vorzeichen grundlegende Unterschiede zu finden.



[…]

[…]

Mehr musst du hier nicht wissen. Aufgaben: S. 17 ;)

Zusammenfassung (Visuelles Vorstellen – Exponentialfunktionen)

Die Form des Graphen einer Exponentialfunktion wird von drei Eigenschaft beeinflusst:

1. […]
2. […]
3. […]

- […]
- […]

Und hier noch einmal alles übersichtlich in einer Tabelle und Schaubildern zusammengefasst:

[...]

Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen (grob)

[...]

Zusammenfassung (trigonometrische Funktionen – grob)

- [...]
- [...]
- [...]

Trigonometrische Funktionen (detailliert)

So, jetzt nehmen wir Sinus und Kosinus mal so weit wie möglich auseinander.

Die Lage im Koordinatensystem und die Werte vom Sinus bzw. Kosinus könnten von vier Variablen abhängig sein: $f(x)=a\cdot\sin(b(x-c))+d$

a. Amplitude

[...]

b. Frequenz (daraus ergibt sich die Periodenlänge)

[...]

c. Verschiebung in x-Richtung

[...]

d. Verschiebung in y-Richtung

[…]

Wurzelfunktion

[…]

Logarithmische Funktionen

[...]

Mathe

So, wenn du bis hier alles verstanden und geübt hast, hast du wirklich ein gutes Fundament – darauf können wir jetzt wirklich gut bauen. Wenn dir noch etwas unklar ist, dann lies es jetzt durch und mach schnell drei Aufgaben dazu. Wenn du im Fundament schon einen Fehler hast, dann kannst du da auch nichts gescheites drauf stellen ☺.
Weil es später noch einmal wichtig wird – im Zusammenhang mit Tangenten zum Beispiel – erkläre ich hier noch mal schnell wie lineare Funktionen aufgebaut sind.

Lineare Funktionen

[...]

Ableitungen

[...]

Kettenregel

Die Kettenregel wird vor allem bei

- trigonometrischen Funktionen
- [...]
- [...]

angewandt.

[...]

Zusammenfassung (Kettenregel)

[...]

Produktregel

Die nächste Ableitungsregel ist die Produktregel. Sie wird angewandt, wenn die Funktion […]

Zusammenfassung (Produktregel)

Die Produktregel muss angewandt werden, wenn die Funktion

1. [...]
2. [...]
3. [...]

Die Produktregel wird angewandt, indem [...]

Quotientenregel

[…]

[…]

Im Folgenden bringe ich dir alles bei, um einen Graphen bzw. eine Funktion so genau wie möglich untersuchen zu können, ohne dabei genau zu wissen, wie sie aussieht. Das Ziel ist es, so viele Informationen über eine Funktion herauszufinden wie möglich. In mathematischer Sprache sagt man dazu auch **Kurvendiskussion**.

Definitionsbereich

Der Definitionsbereich gibt den Bereich an, in dem die Funktion definiert ist. Logisch, oder? Aber was soll das bitte bedeuten?
Beim Definitionsbereich betrachtet man die x -Werte.

> Alle x -Werte, die in die Funktion eingesetzt werden können, gehören zum Definitionsbereich.

Beispiel: $f(x)=\sqrt{x}$

Bei dieser Funktion f darf man keine negativen Zahlen einsetzen, weil der Taschenrechner sonst ein ERROR anzeigt. Und immer, wenn das passiert, dann ist die Funktion nicht definiert. In diesem Falle betrifft das eben alle negativen Zahlen und deswegen gehören sie nicht zum Definitionsbereich. Der Definitionsbereich der Funktion f beinhaltet also alle positiven Zahlen und die Null. Wenn sowas in einer Klausur gefragt wird, kann man das auch ruhig einfach in Worten hinschreiben: „Der Definitionsbereich beinhaltet alle positiven Zahlen, einschließlich der Null.“ Man könnte das aber natürlich auch mathematisch aufschreiben: $D=\mathbb{R}_0^+$

Diese Zeichen liest man so: „Der Definitionsbereich entspricht allen positiven reellen Zahlen[1], einschließlich der Null.“

Normalerweise wird nicht gefragt: „Welche Zahlen kann ich für x einsetzen?“, sondern eher: „Welche Zahlen kann ich für x <u>nicht</u> einsetzen?“. Diese Zahlen gehören dann eben nicht zum Definitionsbereich.
Dazu noch ein

1 Wenn du Probleme mit den „verschiedenen Zahlenarten“ hast, also „reelle Zahlen, rationale Zahlen, ...“, dann solltest du dir hinten im Buch kurz das Kapitel „Mengenlehre“ durchlesen :)

Beispiel: $f(x)=\frac{1}{x}$

Na, was dürfte hier für x nicht eingesetzt werden, weil der Taschenrechner sonst ERROR ausgibt? – Richtig, die Null! Das heißt also, dass wir alle Zahlen einsetzen könnten, außer die Null. Mathematisch geschrieben sieht das so aus: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Sieht jetzt wieder etwas kompliziert aus, daran muss man sich halt gewöhnen und dafür habe ich auch paar Aufgaben im Aufgabenbuch auf Seite 22 für dich. Wäre schon gut, wenn man dieses mathematische Gekritzel versteht. Man liest es: „Der Definitionsbereich entspricht allen reellen Zahlen außer der Null.“. Dieser schräge Strich da „\“ heißt Backslash und bedeutet „außer“. Zahlen die nicht dazugehören, werden dann halt in so geschweifte Klammern „{ }“ geschrieben

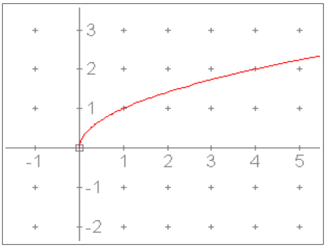
Zusammenfassung (Definitionsbereich)

- Welche Werte können für x eingesetzt werden.
- Wir fragen uns aber, welche Werte für x *nicht* eingesetzt werden dürfen, weil der Taschenrechner sonst ein ERROR ausgibt.
- Bei der Frage nach dem Definitionsbereich sollte man bei folgenden Funktionen aufmerksam sein:
    - x steht im Nenner (man kann nicht durch Null teilen)
    - x steht unter einer Wurzel (Wurzel aus negativen Zahlen geht nicht)
    - x steht im Logarithmus (Logarithmus aus negativen Werten und der 0 geht auch nicht)

Bei den anderen Funktionen, also den ganzrat. Funktionen, den Exponentialfunktionen und den trigonometrischen Funktionen, kann man alle Werte für x einsetzen, also ist der Definitionsbereich immer $D=\mathbb{R}$.

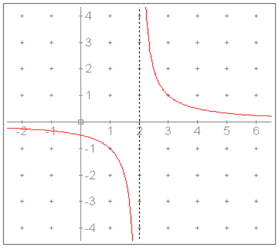
Am Graphen erkennt man Werte, die nicht zum Definitionsbereich gehören daran, dass für diese Werte kein Graph vorhanden ist.

$f(x)=\sqrt{x}$



Man sieht, dass bei negativen x-Werten kein Graph vorhanden ist.

$g(x)=\frac{1}{x-2}$



Man sieht, dass bei $x=2$ kein Graph vorhanden ist.

Wertebereich

[...]

Symmetrie

[...]

Zusammenfassung (Symmetrie)

[...]

Verhalten gegen Unendlich

[...]

y-Achsenabschnitt

[...]

Nullstellen

Tzja, und jetzt wirst du wohl ziemlich verblüfft sein, wie einfach das doch ist. Denn um die Nullstellen zu berechnen, muss man [...]

Extrempunkte

[...]

Zusammenfassung (Extrempunkte)

Extrempunkte berechnen ist total einfach. Merk dir einfach folgendes Schema und mach paar Aufgaben dazu.

1. Ableiten (man braucht die ersten beiden Ableitungen)

notwendige Bedingung:

2. Erste Ableitung gleich Null setzen
3. Diese Gleichung lösen

hinreichende Bedingung:

4. Das Ergebnis der Gleichung in der zweiten Ableitung für x einsetzen
5. ausrechnen
    a. Ergebnis > 0 bedeutet: Tiefpunkt
    b. Ergebnis < 0 bedeutet: Hochpunkt
    c. Ergebnis = 0 bedeutet: kein Extrempunkt
6. Wenn verlangt, noch den y-Wert berechnen (mit Hilfe der Ausgangsfunktion)

Wendepunkte

[...]

Zusammenfassung (Wendepunkte)

[...]

Skizze

1. Nullstellen einzeichnen
2. [...]
3. [...]
4. y-Achsenabschnitt einzeichnen
5. [...]

So schwer ist eine Kurvendiskussion jetzt gar nicht mehr, stimmt´s? ;)

Tangente und Normale

[...]

Tangente bestimmen

[…]

Bestimmen einer Tangente mit der Tangentengleichung

[…]

Tangentengleichung: $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0) \quad P(x_0 \mid f(x_0))$

Ich werde das hier mal ganz Ausführlich machen und die einzelnen „Teile“ einzeln bestimmen.

[...]

Schritt für Schritt die Tangente bestimmen

An vielen Schulen wird diese Tangentengleichung nicht gelehrt. In diesen Fällen muss der Funktionsterm der Tangente folgendermaßen berechnet werden:

[...]

Zusammenfassung (Bestimmen der Tangentenfunktion)

Tangentengleichung:

1. Erste Ableitung bilden
2. [...]
3. [...]
4. [...]
5. Vereinfachen

Schritt für Schritt:

1. Erste Ableitung bilden
2. [...]
3. [...]

Normale bestimmen

Wenn man die Tangente schon hat, dann ist es mega easy die Normale zu bestimmen. Die Normale hat ja nur die Eigenschaft, dass sie im rechten Winkel zur Tangente steht, also **orthogonal** zu ihr ist.

[...]

Zusammenfassung (Normale bestimmen)

1. $m_n = -\frac{1}{m_t}$
2. x, y, m in $y = mx + b$ einsetzen und nach b auflösen.

Das ist alles, nur zwei Schritte. Und in den Schulen wird es immer sooo kompliziert gemacht.... -.-

Stammfunktionen

[...]

Flächen und Funktionen

[...]

Ober- und Untersumme

[...]

Obersumme:

[...]

Untersumme:

[...]

Zwischen Graph und x-Achse

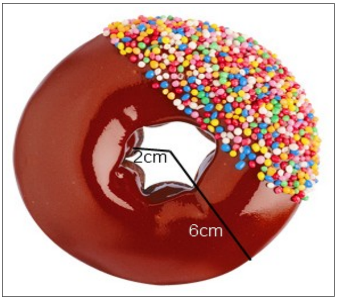
[...]

Kleiner Tipp:

Wenn eine ganzrationale Funktion gegeben ist und 0 in die Stammfunktion einsetzt wird, kommt immer 0 raus!

Zwischen zwei Graphen

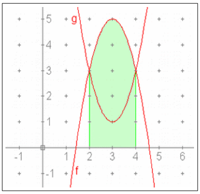
Jetzt gibt es natürlich genug Aufgaben, bei denen du nicht die Fläche zwischen einer Funktion und der x-Achse berechnen sollst, sondern die Fläche zwischen zwei Funktionen. Wie könntest du nun vorgehen, wenn mit der Stammfunktion immer nur die Fläche zwischen Funktion und x-Achse berechnet wird?



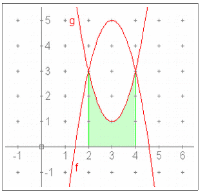
Um das zu erklären will ich dir ein ähnliches Beispiel zeigen. Stell dir vor, du schaust von oben auf einen Donut und willst die Fläche des Donuts berechnen. (Ja, ich bekomme gerade auch Hunger auf Donut… :D). Dieser Donut hat einen Radius von $6cm$ und das Loch in der Mitte hat einen Radius von $2cm$. Das Problem in diesem Fall ist, dass wir nur die Fläche eines Kreises bestimmen können und nicht die eines Rings. Also, im Prinzip dasselbe Problem, wie wir es bei den Flächen mit Funktionen haben, wenn wir halt die Fläche zwischen zwei Funktionen berechnen wollen. Aber zurück zum Donut – wie könnten wir trotzdem die Fläche des Donuts berechnen, auch wenn wir nur ganze Kreise berechnen können?

Wir könnten die Fläche des Donuts berechnen, indem wir einfach erst den ganzen Kreis mit $6cm$ Radius berechnen und dann das Loch in der Mitte mit $2cm$ Radius abziehen. Somit bleibt genau die Fläche des Donuts übrig!

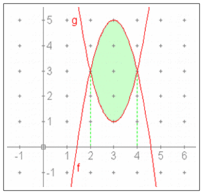
Naja, und genauso machen wir das auch bei den Flächen zwischen zwei Funktionen. Erst berechnen wir die größere Fläche und ziehen davon dann die kleinere ab, sodass die Fläche in der Mitte übrig bleibt.



−



=



$$F(4)-F(2) \quad - \quad G(4)-G(2) \quad = \quad F(4)-F(2)-[G(4)-G(2)]$$

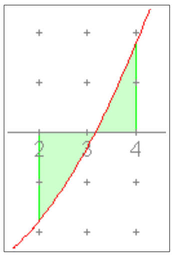
$$F(4)-F(2) \quad - \quad G(4)-G(2) \quad = \quad F(4)-F(2)-G(4)+G(2)$$

Wenn wir die Fläche zwischen den beiden Graphen berechnen wollen, dann berechnen wir erst die komplette Fläche (unter f) und ziehen dann die kleine Fläche (unter g) davon ab und somit bleibt die Fläche zwischen f und g übrig.

[...]

Flächen über und unter der x-Achse

Beim berechnen von Flächen musst du darauf achten, dass bei Flächen, die unter der x-Achse sind ein negatives Ergebnis raus kommt. Da ein Flächeninhalt aber nicht negativ sein kann, musst du die Zahl einfach positiv angeben. (Das heißt, dass du den **Betrag** der Zahl angeben musst.)



Jetzt ist es aber so, dass Flächen zum Teil über und zum Teil unter der x-Achse liegen könnten. Wenn du den Flächeninhalt nun wie gewohnt berechnen willst – im Beispiel der Skizze also $\int_2^4 f(x)\ dx$ – dann subtrahieren sich die beiden Teilflächen aufgrund der verschiedenen Vorzeichen. Somit bekommst du als Ergebnis nicht die Fläche als ganzes, sondern die Differenz der beiden Flächen über und unter der x-Achse.

Wenn es also der Fall sein sollte, dass du eine Fläche berechnen musst, die sowohl über als auch unter der x-Achse liegt, dann musst du [...]

Zusammenfassung (Flächen über und unter der x-Achse)

[...]

„Unendliche Flächen“

[...]

Extremwertaufgaben

Die Extremwertaufgaben sind auf jeden Fall ein Schwerpunkt bei Analysisaufgaben. Auch hier denken viele, dass man dabei so viel Neues wissen muss, aber ich kann dir versprechen, dass du mittlerweile alles kannst, was du können musst, um eine Extremwertaufgabe lösen zu können.
Das einzige Problem ist, dass du noch nicht weißt, wie du dein Können anwenden musst. Das zeige ich dir aber an einem
Beispiel:
[…]

Randwertbetrachtung

[…]

Rotationsvolumen

[...]

Funktionsgleichungen herleiten

Um Funktionsgleichungen herzuleiten, hat man es immer mit sogenannten linearen Gleichungssystemen zu tun. Diese muss man halt einfach lösen können und deswegen erkläre ich hier erst mal, wie man das macht.

Lineare Gleichungssysteme

[…]

Additionsverfahren

[...]

Gleichsetzungsverfahren

[...]

Einsetzungsverfahren

[…]

3 Gleichungen, 3 Variablen

[…]

Zusammenfassung (3 Gleichungen, 3 Variablen)

1. Such dir zwei Gleichungen aus und eliminiere eine Variable.
2. [...]
3. [...]
4. Setze diese beiden Variablen in eine der drei Ausgangsgleichungen ein und löse nach der verbleibenden Variable auf.

Beachte:

1. [...]
2. [...]

Übungen findest du auf Seite 35.

Funktionsgleichungen herleiten

[...]

> Die einzige Schwierigkeit bei diesen Aufgaben ist es die Bedingungen heraus zu lesen und in Gleichungen zu verpacken. Danach folgt einfach nur „rechnen“ ;)

[…]

Hier noch eine Liste von ein paar Formulierungen und die Umsetzung davon in Gleichungen.

Formulierung	Gleichung
„Graph verläuft durch den Punkt $P(1\mid 2)$ “	$2=f(1)$
„Steigung bei $x=4$ ist 2 “	$2=f'(4)$
„Steigung im Punkt $P(1\mid 3)$ ist 2 “ aber somit ist auch ein Punkt angegeben, also	$2=f'(1)$ $3=f(1)$
„Extrempunkt bei $x=5$ “	$0=f'(5)$
[… Diese Liste hat im Buch 20 Zeilen]	

[...]

Mengenlehre

Kurz was dazu, weil dies leider nicht jedem klar ist und dann so Dinge wie $n \in \mathbb{Z}$ oder so nicht verstanden werden.
Es fängt an mit den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Das sind alle positiven ganzen Zahlen, also 1, 2, 3, 4, 5, …
Die nächste Stufe...

[...]

Im Bild sieht man, dass jeweils die nächste Menge, die Zahlen der Mengen davor mit beinhaltet.

Unterschied zwischen Punkt, Stelle und Wert

Auch so eine Sache, die in der Schule nie explizit gesagt wird, sondern einfach erwartet. Und niemandem der Schüler ist aufgefallen, dass es da überhaupt einen Unterschied gibt...

Also, wenn es heißt „Berechnen Sie den ExtremPUNKT“ (oder was für einen PUNKT auch immer), dann muss man eben den Punkt angeben. Das heißt, man braucht **sowohl den x-Wert als auch den y-Wert**, sodass man dann schreiben kann: P(x-Wert|y-Wert) ← das ist ein Punkt.

Wenn es heißt „Berechnen Sie die ExtremSTELLE“ (oder was für eine STELLE auch immer), dann muss man **nur den x-Wert** angeben und braucht **nicht den y-Wert**, weil eine Stelle halt nur der x-Wert ist.

Und wenn es heißt „Berechnen Sie den ExtremWERT“ (oder was für einen WERT auch immer), dann muss man **nur den y-Wert** angeben und braucht **nicht den x-Wert anzugeben**, weil ein Wert halt nur der y-Wert ist. Allerdings muss man dabei erwähnen, dass man **den x-Wert braucht**, um den y-Wert zu berechnen.

So, dann hätten wir das jetzt auch geklärt :)

Sanfte Sache ;)

Von Epistropheus am 16. Oktober 2016

Format: Taschenbuch | Verifizierter Kauf

Ich habe mich jetzt lange davor gedrückt, eine Rezenson zu diesem Buch zu schreiben, da ich ganz ehrlich gesagt nur einen Bruchteil durchgearbeitet habe. Das liegt wohl unter anderem daran, dass mein Prof. für Mathematik mir gewisse Dinge mit solcher Klarheit vor Augen geführt hat, dass ich nicht mehr darauf zurückgreifen musste. Dennoch habe ich mir jedes Kapitel zumindest angesehen, und auch einige Übungen gemacht.

Aber zum Buch:

Verständlicher geht nicht. Wirklich. Wer sich wie ich regelmäßig von Formeln und dem abstrakten Mathe Wahnsinn gegrault und gefürchtet hat, für den ist dieses Buch ein MUSS! Ehrlich, Dario hat es geschafft die wichtigsten Konzepte wirklich so verdammt einfach auf den Punkt und in Relation zu den anderen zu bringen, dass man einfach nur staunen kann.
Das Buch hier ist meiner persönlichen Ansicht nach ein Vorbild für Lehrbücher im Allgemeinen. Mit Sichrheit wird es keiner akademisch überkorrekten Prüfung standhalten, dafür ist es zu nah am Schüler/Studenten geschrieben. (Damit meine ich auf keinen Fall, dass das Buch inhaltlich schwächelt, sondern dass es vom Stil her einfach anders ist.) Aber genau das ist der Punkt welcher das Buch so gut macht -> Warum hat man quasi konstant das Gefühl, dass bei Lehrbüchern der Fokus darauf gelegt wird, den Schüler/Student möglichst selbst an die dahinterliegende Information kommen zu lassen? Sollte der Sinn nicht darin bestehen, den Inhalt schnellstmöglichts, bestmöglichst und natürlich inhaltlich fehlerfrei zu LEHREN? Warum langweilt, verwirrt und verunsichert man Schüler und Studenten so ungemein? Davon hat keiner was.

tl;dr: Sanfte Sache, inhaltlich alles dabei, greif zu.

Aufgaben

Quadratische Gleichungen

Aufgabe 1

Löse die Gleichungen mit Hilfe einer *Formel*.

a) $0=x^2+2x+1$

Wendepunkte

Aufgabe 1

Gib die Wendepunkte an und ob es sich um einen links-rechts oder rechts-links Wendepunkt handelt.

a) $f(x)=4x^4-x^3$

Zwischen zwei Graphen

Aufgabe 1

Berechne die Fläche zwischen den beiden Graphen im Intervall $[2,3]$.

a) $f(x)=(x-2)^3$
$g(x)=e^{x-2}$

Extremwertaufgaben

Aufgabe 1

Bauer Alfred expandiert und hat sich 50 neue Hühner gekauft, die er nun irgendwo unterkriegen muss. In seiner Scheune findet er 40m Ma-

schendrahtzaun. Da der Rest seines Bauernhofes rechteckig angeordnet ist, soll auch das neue Hühnergehege rechteckig sein.
Wie lang müssen die Seiten des Hühnergeheges sein, damit die Fläche maximal wird?
Welche Fläche hat das Hühnergehege dann?

Zusatz: Man sagt, dass man pro Huhn mit $2m^2$ rechnen soll, damit sie glücklich sind.[1] Werden die neuen Hühner von Bauer Alfred glücklich sein?

Ein muss für alle Antimathematiker!
Von M. A. am 15. August 2016
Format: Taschenbuch | Verifizierter Kauf
Endlich ein Mathebuch das einem Mathematik in verständlichen und hilfreichen Erklärungen nahe bringt.
Es ist humorvoll und spricht den Leser direkt an, das erleichtert den Zugang ungemein.
Auch die allgemeinen Ratschläge wie man an Mathematik überhaupt rangehen soll, haben mir sehr geholfen.
Ich bin im wahrsten Sinne schon immer ein Antimathematiker gewesen, aber durch dieses Buch hat Mathe für mich seinen Schrecken verloren ;-)
Übrigens das beste Vorwort ever! :-)
Auch möchte ich die Hilfsbereitschaft und den freundlichen E-Mail Kontakt mit dem Autor Dario erwähnen.
Das gibt es bestimmt nicht oft. Fand ich sehr positiv.

Unsere Rettung
Von jasmin asja goolsby am 23. Oktober 2016
Format: Taschenbuch | Verifizierter Kauf
Meine Tochter besucht die Oberstufe und Mathe war schon immer ein Problem. Das Buch war unsere letzte Hoffnung und wir wurden nicht enttäuscht. Endlich versteht sie den Stoff. Vor allem hat sie sich schon um eine Note verbessert. Kann das Buch nur weiterempfehlen

1 Das habe ich mir jetzt einfach mal so ausgedacht...

Lösungen

Quadratische Gleichungen

Aufgabe 1

a) $0=x^2+2x+1$

Mit der Mitternachtsformel

$a=1 \quad b=2 \quad c=1$

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$$

$$x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}$$

$$x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{0}}{2}$$

Mit der PQ – Formel

$p=2 \quad q=1$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

$$x_{1/2}=-\frac{2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2-1}$$

$$x_{1/2}=-1\pm\sqrt{1-1}$$

$$x_{1/2}=-1\pm\sqrt{0}$$

unter der Wurzel ne 0, also

nur eine Lösung: $x_{1/2}=-1$

Wendepunkte

Aufgabe 1

a) $f(x)=4x^4-x^3$

$f'(x)=16x^3-3x^2$

$f''(x)=48x^2-6x$

notwendige Bedingung:

$0=48x^2-6x$

$0=x(48x-6) \rightarrow x_1=0$

$0=48x-6$

$6 = 48x$

$\frac{6}{48} = \frac{1}{8} = x_2$

hinreichende Bedingung:

$f'''(x) = 96x - 6$

$f'''(0) = 96 \cdot 0 - 6$

$f'''(0) = -6$

$-6 < 0$, also links-rechts-Kurve

$f'''\left(\frac{1}{8}\right) = 96 \cdot \frac{1}{8} - 6$

$f'''\left(\frac{1}{8}\right) = 6$

$6 > 0$, also rechts-links-Kurve

Jetzt noch die y-Werte von den WendePUNKTen berechnen ;)

$f(0) = 4 \cdot 0^4 - 0^3$

$f(0) = 0$

$f\left(\frac{1}{8}\right) = 4\left(\frac{1}{8}\right)^4 - \left(\frac{1}{8}\right)^3$

$f\left(\frac{1}{8}\right) \approx 0{,}001$

$WP_1(0 \mid 0)$ linksRechts

$WP_2\left(\frac{1}{8} \mid 0{,}001\right)$ rechtsLinks

Zwischen zwei Graphen

Aufgabe 1

a) $f(x)=(x-2)^3$ | ausmultiplizieren

$f(x)=x^3-6x^2+12x-8$ | aufleiten

$F(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^3+6x^2-8x$

$g(x)=e^{x-2}$

$G(x)=e^{x-2}$

$A=\int_2^3 f(x)-g(x)dx$

$A=\int_2^3 x^3-6x^2+12x-8-e^{x-2}\ dx$

$A=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+6x^2-8x-e^{x-2}\right]_2^3$

$A=\frac{1}{4}\cdot 3^4-2\cdot 3^3+6\cdot 3^2-8\cdot 3-e^{3-2}-\left(\frac{1}{4}\cdot 2^4-2\cdot 2^3+6\cdot 2^2-8\cdot 2-e^{2-2}\right)$

$A\approx \quad -6{,}47 \quad - \quad (-5)$

$A\approx -1{,}47$ | aber weil Flächen nicht negativ sein können...

$A\approx 1{,}47$ FE

Extremwertaufgaben

Aufgabe 1

Diese Aufgabe will ich mal ganz ausführlich erklären.

1. Was ist das Ziel der Aufgabe? Was wollen die von mir?

- Seitenlänge, damit Fläche maximal
- maximale Fläche
- Hühner glücklich?

2. Bei Extremwertaufgaben soll ja immer etwas „extrem“ werden und bei dieser Aufgabe ist das die Fläche. Wir wissen, dass es eine recht-

eckige Fläche ist und stellen dafür eine ganz allgemeine Gleichung auf: $A = a \cdot b$

Oh Wunder – die Fläche ist zur Zeit von zwei Variablen abhängig! Da muss es doch eine Nebenbedingung geben... „In seiner Scheune findet er 40m Maschendrahtzaun.“ Also stellen wir mal ganz allgemein eine Gleichung damit auf. Immerhin hat das Rechteck also einen Umfang von 40m. Also kann man sagen $40 = 2a + 2b$.

Jetzt müssen wir diese Gleichung nach einer Variablen umformen, damit wir sie dann in die erste Funktion $A = a \cdot b$ einsetzen können.

$40 = 2a + 2b \quad | -2b$

$40 - 2b = 2a \quad | \div 2$

$20 - b = a$

So, dann setzen wir jetzt a in die Ausgangsfunktion ein:

$A = a \cdot b \quad | \; a = 20 - b$

$A = (20 - b) \cdot b$

Perfekt! Jetzt haben wir den schwersten Teil geschafft. Jetzt heißt es nur noch: Extrempunkt berechnen! Dafür multiplizieren wir die Gleichung erst mal aus.

$A(b) = 20b - b^2 \quad |$ ableiten

$A'(b) = 20 - 2b \quad |$ gleich Null setzen

notwendige Bedingung:

$0 = 20 - 2b \quad | + 2b \; | \div 2$

$b = 10$

Okay, bei b liegt also möglicherweise ein Extrempunkt. Um sicher zu gehen, brauchen wir die

hinreichende Bedingung:

$A''(b) = -2$

$A''(10) = -2 \rightarrow -2 < 0 \rightarrow$ Hochpunkt

Die Seite b muss also 10m lang sein, damit die Fläche maximal wird. Um die Länge der Seite a auszurechnen, müssen wir b in die Nebenbedingung einsetzen:

$40 = 2a + 2b \quad | \, b = 10$

$40 = 2a + 2 \cdot 10 \quad | -20 \quad | \div 2$

$a = 10$

Okay, wie die Seite b, muss auch die Seite a 10m lang sein, damit die Fläche maximal wird. Und spätestens jetzt sollte man nochmal auf die Aufgabenstellung schauen, um genau zu wissen, was denn gefragt ist.
In diesem Fall, will man noch diese maximale Fläche wissen und dann gibt es noch eine Zusatzaufgabe.

$A_{max} = 10m \cdot 10m$

$A_{max} = 100m^2$

In der Zusatzaufgabe steht nun „Man sagt, dass man pro Huhn mit $2m^2$ rechnen soll, damit sie glücklich sind.“
Wir haben also $100m^2$ und 50 Hühner. Also rechnen wir einfach 100 durch 50 und dann wissen wir, wie viel m^2 für jedes Huhn zur Verfügung stehen.

$100m^2 \div 50 = 2m^2$

Aha, jedes Huhn hat rechnerisch also seine eigenen $2m^2$.
Und zu guter Letzt darf man natürlich nicht die Antwortsätze vergessen. Das wäre richtig ärgerlich, wenn man wegen so einem Satz paar Punkte liegen lässt.
A: Damit die Fläche maximal wird, müssen die Seiten des Geheges jeweils 10m lang sein. Daraus ergibt sich eine maximale Fläche von $100m^2$.
Ja, seine Hühner werden glückliche Hühner sein.

Und jetzt sei einfach mal ganz ehrlich zu dir selbst: So schwer ist Mathe nun wirklich nicht, oder!?

Vielen Dank, dass du dir die Leseprobe durchgelesen hast! Ich hoffe, dass du alleine damit schon einige AHA-Erlebnisse hattest und ab und zu mal schmunzeln musstest. ;)

Kauf dir jetzt dieses Buch und erfahre - wie viele 1000 andere auch - wie einfach Mathe sein kann!

Bestes Mathebuch der Welt
Von Martina Jentes am 27. Januar 2017
Format: Taschenbuch | Verifizierter Kauf

Absolutes Must-Have für jeden der Probleme in Mathe hat! Mache von der Realschule in der gymnasialen Oberstufe weiter und war am Anfang echt hoffnungslos verloren! Ich habe Nachhilfestunden genommen, mit Lernvideos versucht meine Lücken selber aufzubessern, hat teilweise geklappt aber dieses Bich ist das beste! Anstatt nur davon zu berichten wie etwas geht wird es auführlich genug erklärt und verständlich gemacht! Ich bin absolut begeistert!